**Завдання 1**

Умова

Є система «зірка-планета» і планета знаходиться на заданій відстані від зірки. Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по круговій орбіті.

[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":1,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"lightblue"}]

Допомога

І зірка, і планета будуть обертатися навкруги центра мас системи. Якщо маса планети є малою відносно маси зірки, центр мас і центр зірки майже співпадають і можна казати про обертання планети навкруги зірки.

Рух по колу потребує щоб відцентрова сила врівноважувалася силою тяжіння, тобто

З (1.1) можна вирахувати необхідну швидкість.

Вирішення

З вихідних даних

Обчислюємо швидкість планети:

В моделі швидкості задаються x і y компонентами, тому в заданому положенні планети *v = (0, 5)*.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]

Відповідь 5

**Завдання 2**

Умова

Є система «зірка-планета» і планета знаходиться на заданій відстані від зірки. Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по еліпсу з великою віссю d.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]

Допомога

Найпростіше вирішення буде, якщо в початковому стані планета знаходиться в афелію чи в перигелію своєї орбіти. Спершу визначимо, де саме. Якщо r < d/2, це перигелій, інакше, це афелій.

За законом тяжіння Ньютона потенційна енергія планети масою *m* на відстані від зірки *r* дорівнює .

Знак «мінус» пояснюється тим, що потенційна енергія тим більша, чим більша відстань між масами (на кшталт розтягуванню пружини). На нескінченній відстані енергія найбільша і в той же час прагне до нуля, бо r стоїть у знаменнику.

За законом збереження енергії сума кінетичної і потенційної енергії планети в афелії і в перигелії однакові.

З цієї формули и закону збереження кутового моменту можна отримати початкову швидкість планети.

Вирішення

За законом збереження кутового моменту

тобто

Знаходимо з огляду на те, що .

Так само виводиться і .

Приклад.

  [{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":3.162,"color":"lightblue"}]

Відповідь 4

*Питання 1*. Комети рухаються по дуже витягнутим еліптичним орбітам. Створіть планету, яка б зникала з поля зору и поверталася через заданий час.

**Завдання 3**

Умова

Створити систему подвійної зірки. Обидві зірки мають однакові маси m, відстанню між їх центрами – r. Обрати таку швидкість окремих зірок, яка забезпечить існування системи подвійної зірки.

Допомога

Подвійна зірка буде існувати, коли зірки будуть обертатися навколо центра мас, а не розлетяться на нескінченну відстань і не впадуть одна на одну.

В будь-який момент часу система має потенційну енергію тяжіння і кінетичну енергію .

Надали зірки можуть зближуватися, розходитися або зберігати початкову відстань, якщо траєкторія кожної зірки коло (рис а). В цьому випадку доцентрова сила

є силою тяжіння до протилежної зірки .

Вирішення

Прирівняємо силу тяжіння до доцентрової сили і знайдемо початкову швидкість.

Приклад. , 1.581.

Зірки можуть розходитися, і при певних значеннях швидкості v розлетяться назвжди. Коли зірки розходяться, кінетична енергія перетікає в потенційну, і якщо запас кінетичної енергії достатній, щоб потенційна енергія сягнула нуля, тобто E >= -H, то відстань між зірками буде зростати до нескінченності.

Наприклад, m = 1000, r = 100. Тоді при планети не будуть розходитися на нескінченність.

Зірки можуть зближуватися і якщо відстань між центрами стане дуже малою, модель не буде працювати правильно.

Обертання зірки навкруги центра мас схоже на рух планети в центральному полі тяжіння. Різниця полягає в тому, що відстані до центу мас вдвічі менші за відстані від однієї зірки до іншої, тому формула для швидкості буде такою

Тут - відстань від зірки до центру мас, коли зірка по відношенню до центра знаходиться в афелії, – теж саме в перигелії. Найменша відстань між зірками дорівнює .

Наприклад, припустимо, що мінімальна відстань між зірками – 60.

Всі швидкості, менші за призводять, якщо не до стиканню зірок, то принаймні до похибок в моделі.

Відповідь 1.6 та -1.6.

**Завдання 4**

Умова

Створити систему зірка-планета-супутник. Планета обертається навкруги зірки, а супутник - навкруги планети.

Допомога

В цьому завданні перед нами повстає славнозвісна проблема трьох тіл, але в окремих випадках ця проблема вирішується просто. Зараз «окремість» полягає в тому, що , де

Спочатку змусимо планету обертатися навкруги зірки без супутника, так, як у першому завданні. Швидкість планети вирахуємо за формулою *, –* відстань від планети до зірки.

Потім, дамо планеті супутник, який буде кружляти навкруги планети, як планета кружляє навкруги зірки.

Вирішення

При визначенні швидкості супутника врахуємо, що планета, на відміну від зірки, рухається.

Приклад.

[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":10,"r":5,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"},

{"name":"Moon","m":0.1,"r":2,"x":410,"y":0,"vx":0,"vy":6,"color":"white"}]

Відповідь 5, 6.

*Питання 1*. На відміну від Місяця, який за рік обертається навкруги Землі приблизно 12 разів, наш супутник обертається приблизно 7.5 разів.

Спираючись на третій закон Кеплера, можна відкоригувати систему так, щоб супутник також робив приблизно 12 обертів за один оберт планети.

*Питання 2*. Що потрібно змінити, щоб супутник обертався навколо планети в протилежному напрямку?

*Питання 3*. Можна спостерігати, що система в цілому потихеньку дрейфує в напряму осі Oy. Чому це відбувається і як цього позбутися?

**Завдання 5**

Балістичний політ тіла – це просто падіння його на Землю. Чим більша початкова швидкість тіла, тим віддаленіш точка зустрічі тіла з поверхнею планети. При достатньої швидкості тіло зовсім не зустрінеться з поверхнею, а буде кружляти навколо Землі. Саме це відобразив Ісаак Ньютон на своєму знаменитому малюнку в книзі «Трактат про систему світу».

Мінімальна швидкість, що забезпечить кружляння, зветься першою космічною.

Умова

Задана планета і висота над поверхнею планети. З цієї висоти робить горизонтальний постріл гармата, яку зобразив Ньютон в книзі «Трактат про систему світу». Оберіть швидкість снаряду, яка забезпечить його політ по колу навкруги планети. Роль снаряду буде виконувати планета-супутник, яку розташуємо на висоті гори.

Допомога

Маса планети - M, радіус планети - r, висота над поверхнею - h, швидкість снаряду – v.

Для польоту по колу радіусом R = r + h нам відома формула

*Вирішення*

Приклад. .

[{"name":"Sun","m":10000,"r":300,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"green"},

{"name":"Noname","m":0.001,"r":5,"x":0,"y":320,"vx":5.590,"vy":0,"color":"white"}]

Відповідь

Друга космічна швидкість дозволить снаряду подолати тяжіння планети і відлетіти у простір космосу.

Як відомо, потенційна енергія тяжіння снаряду масою *m* на відстані від центру планети *r* дорівнює . Початкова швидкість снаряду v має бути достатньою, щоб кінетична енергія перевищила потенційну

Приклад. .

**Завдання 6**

Ракета від Землі до Сонця

Умова

Планета обертається навкруги центральної зірки по круговій орбіті. Запустити ракету з планети так, щоб вона наблизилась до центра зірки на два її радіуса і після того стала обертатися навкруги зірки. Визначити початкову швидкість ракети.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"}],

Допомога

Нехай R – радіус зірки, M – її маса, S – відстань від планети до зірки.

Тоді ракета має рухатися по еліпсу з великою віссю

Вирішення

Спершу треба визначитись, в афелії чи перигелії знаходиться ракета під час старту.

Якщо S > 2R, це афелій.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"}],

Відповідь Vy = -0.85

**Завдання 7**

До орбіти Марсу

З будь-якої планети можна запустити ракету по балістичній траєкторії. Ракета має малі масу (10e-6) і розмір (1.) у порівнянні з планетою. Стартує ракета з поверхні планети починає свій рух в напряму руху планети. Початкова швидкість ракети задається перед стартом і складається зі швидкістю самої планети.

Умова

Дві планети (умовно Земля і Марс) обертаються навкруги центральної зірки (умовно Сонця) по круговим орбітам. Запустити ракету с Землі так, щоб вона досягла орбіти Марса. Визначити мінімально необхідну швидкість ракети.

[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.5811,"color":"orange"}]

Допомога

Згідно з першим законом Кеплера орбіта ракети має бути еліпсом, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Перигелійна відстань орбіти це відстань від зірки до Землі, афелійна відстань – відстань до Марса.

Будемо зневажати тяжінням Землі, яке діє на ракету. В стартовому положенні ракети прискорення від Землі становить 0.001/9² ≈ 1e-2 , а прискорення від Сонця 1000/300² ≈ 1e-5, тобто в 1000 разів більше.

Вирішення

Скористаємося вже відомою формулою для розрахунку початкової, тобто перигелійної, швидкості ракети.

Щоб визначити швидкість ракети відносно місця старту, віднімемо від неї швидкість Землі.

Приклад. = 0.126

{"planets":[{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"orange"},

{"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

"starters":[{"kind":1,"param1":0.126,"param2":0,"startStep":0,"planetName":"Earth"}]}

**Завдання 8**

Подорож на Марс

Умова

Щоб висадитися на Марс, ракета повинна досягти його орбіти в той самий час, коли там буде знаходитися планета Марс. Треба обрати не лише швидкість ракети, а і час її запуску.

Допомога

Завдяки круговій орбіті Марса, період його обертання можна визначити, поділивши довжину орбіти на швидкість планети.

Третій закон Кеплера говорить, що квадрати періодів обертання відносяться, як куби великих осей орбіт, тому період обертання ракети .

і ракета досягне орбіти Марса за половину свого періоду

Кутова швидкість марса , тому за цей час Марс просунеться на кут .

До зустрічі з ракетою йому не вистачить кута

Тому запускати ракету с Землі варто, коли у своєму русі Марс буде випереджати Землю на кут , або, що те ж саме, Земля буде попереду Марса на кут .

Вирішення

Кутова швидкість Землі відносно Марса

Виходячи з початкового стану системи, потрібне випередження виникне за час

Приклад

-- ----------------------------------

Показати, як можна скористатися гравітацією іншої планети для прискорення руху ракети.

Побудувати модель внутрішньої частини Сонячної системи - Меркурій, Венера, Земля, Марс. Дотриматися співвідношення реальних відстаней від планет до Сонця.

Створити таку туманність, яка б прїснувала якнайдовше.